C O N C O U R S D ' A D M I S S I O N
A L ' E C O L E D E L ' A I R

ANNEE 1991

PREMIERE EPREUVE A OPTION
MATHEMATIQUES

T - TA

(Durée : 3 h - coefficient : 9)

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

On se donne, dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe B, un vecteur $\vec{A}$ non nul, de composantes (a, b, c), et un vecteur $\vec{L}$ de composantes (l, m, n). On pose $\alpha = \|\vec{A}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. On cherche un vecteur $\vec{X}$ de composantes (x, y, z) satisfaisant au système d'équations affines
(S_0) : $bz - cy = l$, $cx - az = m$, $ay - bx = n$.

1°) a) Discuter et résoudre le système (S_0). On pourra supposer $C \neq 0$.

b) Interpréter vectoriellement le système (S_0), sa discussion et sa résolution .

2°) On considère le système (S_1) :

$$\begin{cases} -cy + bz + at = l \\ cx - az + bt = m \\ ay - bx + ct = n \\ ax + by + cz = p \end{cases}$$

où x, y, z, t sont les inconnues, p un réel quelconque donné.

On note ce système : AX = L

où A est la matrice réelle $\begin{bmatrix} 0 & -c & b & a \\ c & 0 & -a & b \\ -b & a & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \\ p \end{bmatrix}$

Soit ${}^tA$ la matrice transposée de A .

a) Calculer la matrice produit : ${}^tA.A$.

b) Montrer que (S_1) est un système de Cramer. Calculer le déterminant de A.

c) Déterminer la solution X_1 de (S_1) (X_1 de composantes x_1, y_1, z_1, t_1).

d) On se propose de retrouver ainsi la solution du système (S_0). A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur t_1 le système S_0 admet-il des solutions ? Exprimer ces solutions en fonction de p considéré comme paramètre variable (On pourra poser $p = \alpha^2.\mu$). Donner une interprétation vectorielle des résultats obtenus.

3°) On considère, dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct d'axes (Ox, Oy, Oz), les points A, L et M de coordonnées respectives (a, b, c) , (1, m, n) et (x, y, z). On suppose A fixé.

a) Quel est l'ensemble P des points L tels que le système (S_0) ait des solutions ?
b) Quel est l'ensemble D des points M dont les coordonnées sont solution de (S_0) lorsque L est donné dans l'ensemble P ?
c) Donner, pour L et A connus, une construction géométrique de l'ensemble D.

4°) On se propose de déterminer les valeurs propres (réelles ou complexes) et les directions propres de la matrice A. Soit λ une telle valeur propre.

a) Calculer le produit $({}^tA - \lambda I)(A - \lambda I)$ (où I est la matrice unité d'ordre 4)
b) En déduire le polynôme caractéristique de la matrice A.
c) Soit X (de composantes x, y, z, t) la colonne représentant un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Montrer que X représente aussi un vecteur propre des matrices ${}^tA$, puis $A - {}^tA$ et $A + {}^tA$, et donner les valeurs propres associées à X pour chacune de ces trois matrices.
d) En déduire les directions propres réelles de A.
d) Lorsque λ est une valeur propre complexe non réelle de A, montrer que les composantes d'un vecteur propre associé X satisfont aux deux relations : $t = 0$ et $ax + by + cz = 0$. Déterminer, à un facteur multiplicatif près, les valeurs (complexes) de x, y, z et montrer qu'on a $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

FIN

***